Dieter Hetzel

**Über graphische reguläre Darstellungen von
zyklischen Erweiterungen kleiner Gruppen**

1. Einleitung

Ein Graph X heißt graphische reguläre Darstellung **GRR** (= graphical regular representation) der Gruppe G , wenn seine Automorphismengruppe isomorph zu G und eine reguläre Permutationsgruppe auf der Eckenmenge von X ist.

Nicht jede Gruppe besitzt eine GRR, und es gibt zahlreiche Ergebnisse über die Existenz und Nichtexistenz von graphischen regulären Darstellungen von Gruppen (siehe [5] und [6]). Das Problem der Bestimmung aller Gruppen, die eine GRR besitzen, wird als **GRR-Problem** bezeichnet, für die Lösung des GRR-Problems ist die Beantwortung folgender Frage wichtig:

Sei G eine Gruppe, die eine GRR besitzt, und sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_n . Besitzt dann auch G_1 eine GRR?

L.A. Nowitz und M.E. Watkins haben gezeigt [3, Theorem 1]:

(1) Ist $n \geq 5$ und G eine endliche Gruppe, so besitzt G_1 eine GRR.

W. Imrich und M.E. Watkins haben in [2] gezeigt

(2) Ist $n = 4$ und $o(G) > 32$, so besitzt G_1 eine GRR [2, Corollary 2A].

(3) Ist $n = 3$ und $o(G) > 36$, so besitzt G_1 eine GRR [2, Theorem 3].

(4) Ist $n = 2$ und $o(G) \neq 12, 16, 32$ so besitzt G_1 eine GRR [2, Theorem 2].

Unter einer **kleinen Gruppe** werde im folgenden eine Gruppe verstanden, deren Ordnung ≤ 36 ist. Über die in (2), (3) und (4) angegebenen Resultate hinaus wird in [2] gezeigt, dass auch bestimmte Typen von Erweiterungen von kleinen Gruppen, die eine GRR besitzen, eine GRR besitzen.

In einer Anzahl von Fällen jedoch bleibt die oben gestellte Frage unbeantwortet. Da die individuelle Untersuchung dieser Fälle sehr langwierig und kompliziert ist, erscheint es sinnvoll, nach Aussagen zu suchen, die die Einschränkungen in (2), (3) und (4) unnötig machen. Das soll hier geschehen.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist:

Theorem 3: Sei G eine endliche oder unendliche Gruppe, die eine GRR besitzt, und sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_n .

i) Ist $n \geq 3$, so besitzt G_1 eine GRR.

ii) Ist $n=2$ und $O(G) \neq 12, 16$, so besitzt G_1 eine GRR.

Zur Erzielung dieses Resultats werden wir uns durchgehend der in [2] und [3] verwendeten Methoden bedienen. In Abschnitt 1 werden die grundlegenden Definitionen und Aussagen angegeben. In Abschnitt 2 wird die Aussage i) von Theorem 3 bewiesen. In Abschnitt 3 wird gezeigt, dass die Einschränkung $O(G) \neq 32$ in (4) unnötig ist, und damit die Aussage ii) von Theorem 3 bewiesen.

2. Definitionen und Eigenschaften von Cayley-Graphen

Der Buchstabe X bezeichne immer einen endlichen oder unendlichen Graphen mit Eckenmenge $V(X)$, Kantenmenge $E(X)$ und Automorphismengruppe $A(X)$.

Ist $v \in V(X)$, so bezeichne $A_v(X)$ den **Stabilisator** von v in $A(X)$, d.h. die Untergruppe der Automorphismen φ aus $A(X)$, für die $\varphi(v) = v$ ist.

Die **identische Permutation** auf $V(X)$ sei mit 1 bezeichnet.

Ist $x \in V(x)$ und $\varphi \in A(x)$, so sagen wir, dass x unter φ **fest** bleibt, wenn $\varphi(x) = x$ ist.

Ist $U \subset A(x)$, so sagen wir, dass x unter U fest bleibt, wenn x unter jedem $\varphi \in U$ fest bleibt.

Ist $V \subset V(x)$, so sagen wir, dass V unter U fest bleibt, wenn jede Ecke $x \in V$ unter U fest bleibt.

Wir sagen, dass V unter U **stabil** bleibt, wenn $\varphi[V] = V$ für alle $\varphi \in U$.

Ist M eine Menge, so sei die **Mächtigkeit** von M mit $|M|$ bezeichnet.

Ist $x \in V(X)$, so sei $N(x)$ die **Menge der Nachbarn der Ecke x** im Graph X und $\rho(x) = |N(x)|$ die Valenz der Ecke x im Graphen X .

Gibt es eine Kardinalzahl ρ , so dass $\rho(x) = \rho$ ist für alle $x \in V(X)$, so wird der Graph X **isovalent** genannt. (Der gebräuchlichere Ausdruck regulär soll hier vermieden werden, da er in dieser Arbeit in anderer Bedeutung vorkommt.)

Ist $V \subset V(x)$, so sei $\rho(x, V) = |N(x) \cap V|$. Der **Komplementärgraph** des Graphen X sei mit X' bezeichnet.

Die **Valenz der Ecke $x \in V(x)$** im Graphen X' sei mit $\rho'(x)$ bezeichnet.

Ist $V \subset V(x)$, so bezeichne $I(V)$ den von X auf V induzierten Untergraphen von X .

Der Buchstabe G bezeichne immer eine endliche oder unendliche Gruppe mit **neutralem Element e** , **Zentrum $Z(G)$** und **Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$** .

Ist $U \subset G$, so sei $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ und $\langle U \rangle$ die von U erzeugte Untergruppe.

Sei $O(G) = |G|$ die **Ordnung der Gruppe G** und $o(g) = |\langle g \rangle|$ die Ordnung des Elements $g \in G$.

Unter einer **Cayley-Menge** in G verstehen wir eine invers abgeschlossene Menge $H \subset G$, die e nicht

enthält.

Im Folgenden bezeichne der Buchstabe H immer eine Cayley-Menge.

Die Untergruppe derjenigen Elemente von $\text{Aut}(G)$, unter denen die Menge H stabil bleibt, sei mit $\text{Aut}(G, H)$ bezeichnet.

Sei $\lambda_g: G \rightarrow G, x \rightarrow gx$ die **Linksmultiplikation** mit g in G und sei $\Lambda_G = \{ \lambda_g \mid g \in G \}$. Die **zyklische Gruppe** der Ordnung n sei mit Z_n bezeichnet.

Ein Graph X heißt **graphisch reguläre Darstellung (GRR)** der Gruppe G , wenn

- i) $A(X)$ isomorph zu G ist und
- ii) $A(x)$ als reguläre Permutationsgruppe auf $V(X)$ operiert.

Der Graph X mit $V(X) = G$ und $E(X) = \{ [x, xh] \mid x \in G, h \in H \}$ wird **Cayley-Graph von G bezüglich H** genannt und mit $X(G, H)$ bezeichnet. Der Cayley-Graph $X = X(G, H)$ ist ein $|H|$ -valenter Graph mit transitiver Automorphismengruppe und A ist eine Untergruppe von $A(x)$, die als reguläre Permutationsgruppe auf $V(X)$ operiert.

Die Gruppe $\text{Aut}(G, H)$ lässt sich als Untergruppe der Gruppe $A_e(x)$ auffassen.

Es ist bekannt, dass jede GRR der Gruppe isomorph zu einem Cayley-Graphen von G ist, und dass der Cayley-Graph $X = X(G, H)$ genau dann eine GRR von G ist, wenn $A_e(X) = \{1\}$ ist (siehe [4]).

Ist $X = X(G, H)$ ein Cayley-Graph und $H' = G \setminus (H \cup \{e\})$, so ist H' eine Cayley-Menge und es gilt $X' = X(G, H')$.

Wegen $A(X) = A(X')$ folgt nun, dass eine Gruppe G , die eine GRR besitzt, stets eine GRR $X(G, H)$ besitzt, für die $2|H| \leq |G| - 1$ ist.

Sei $X = X(G, H)$ ein Cayley-Graph.

Ist $\varphi \in A_e(X)$ und $a \in V(x)$, so sei der Automorphismus φ_a definiert durch $\varphi_a =$

$$(\lambda_{\varphi(a)})^{-1} \varphi \lambda_a \quad (\lambda_g : \text{Linksmultiplikation } x \rightarrow gx)$$

(1, 1) Dann ist $\varphi_a \in A_e(X)$ und für alle $x \in V(X)$ gilt

$$\varphi(ax) = \varphi(a) \varphi_a(x) .$$

Wir benötigen die beiden folgenden Ergebnisse aus [1]:

(Die Aussagen (1,2) und (1,3) wurden in dieser Form in [1] nur für endliche Cayley-Graphen bewiesen. Der Beweis im unendlichen Fall ergibt sich leicht unter Verwendung der Aussage $\varphi(a^{-1}) = (\varphi_a(a))^{-1}$, die ihrerseits unmittelbar aus (1,1) folgt.)

(1. 2) Sei $X = X(G, H)$ ein Cayley-Graph, und sei $K \subset V(X)$.

Bleibt dann K unter $A_e(x)$ fest(stabil), so bleibt auch $\langle K \rangle$ unter $A_e(X)$ fest(stabil). Ist K ein Erzeugendensystem der Gruppe G und bleibt K unter $A_e(x)$ fest, so ist X eine GRR der Gruppe G .

(1. 3) Sei $X = X(G, H)$ ein Cayley-Graph und sei $a \in V(x)$, so dass für jedes $\Psi \in A_e(x)$ gilt $\Psi(a) \in [a, a^{-1}]$. Ist dann $\varphi \in A_e(X)$, so ist $\varphi(a^n) = (\varphi(a))^n$ für alle ganzen Zahlen n .

Sei X ein isovalenter Graph. Eine Partition $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ der Menge $V(X)$ in mindestens zwei und höchstens m Mengen, so dass jede Ecke aus einer Menge V_i mit höchstens n Ecken aus jeder Menge V_j ($j \neq i$) verbunden ist, heißt **$P_{m,n}$ -Partition** des Graphen X .

In [2] wurde bewiesen:

(1.4) Besitzt sowohl der Graph X als auch sein Komplementärgraph X' eine $P_{m,n}$ -Partition, so ist $|V(x)| \leq n \cdot m \cdot (m + 2)$.

Sind m und n ganze Zahlen mit $m \geq 2, n \geq 1$, so sei $v(m,n)$ definiert als die kleinste Kardinalzahl, so dass für jede GRR X aus $|V(x)| > v(m,n)$ folgt, dass entweder X oder X' keine $P_{m,n}$ -Partition besitzt.

Dann folgt sofort: $v(m,n) \leq n \cdot m \cdot (m + 2)$

Zusätzlich wurde in [2] bewiesen:

(1.5) $v(3,1) \leq 11$

(1.6) $v(2,2) \leq 15$

3. Erweiterungstheoreme

Sei $X = X(G,H)$ ein Cayley-Graph der Gruppe G . Sei G_1 eine Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe $Z_n, n > 2$. Sei b ein Element aus $G_1 - G$, sodass $G_1 = \langle G, b \rangle$ ist. Sei $K \subset bG$ eine nicht leere endliche Menge und sei $k = |K|$. Sei $H_1 = H \cup K \cup K^{-1}$. Dann besitzt der Graph $Y = X(G_1, H_1)$ die folgenden Eigenschaften (siehe auch [2] und [3]):

(2.1) Jeder der Graphen $X_i = I(b^i G)$ ist isomorph zum Graphen $X = X_0$. Jede Ecke aus der Menge $b^i G$ ist mit genau k Ecken aus der Menge $b^{i+1} G$, genau k Ecken aus der Menge $b^{i-1} G$ und keiner Ecke der Mengen $b^j G$ ($j \neq i-1, i, i+1$) verbunden. Bleibt die Menge G unter $A_e(Y)$ stabil, so bilden die Mengen $b^i G$ ein vollständiges **Blocksystem** von $A_e(Y)$.

(2.2) Besitzt der Graph X keine P_{nk} -Partition, so bleibt die Menge G unter $A_e(Y)$ stabil.

Theorem 1. Sei G eine endliche oder unendliche Gruppe. Sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_n , wobei $n \geq 4$ ist. Besitzt dann G eine GRR, so besitzt auch G_1 eine GRR.

Beweis: Ist G eine unendliche Gruppe, so wählen wir eine GRR X von G , die keine $P_{n,3}$ -Partition besitzt. Ist G eine endliche Gruppe, so wählen wir eine GRR $X = X(G,H)$ mit $2|H| \leq |G| - 1$.

Sei $b \in G_1 \setminus G$, so dass $G_1 = \langle G, b \rangle$ ist. Sei β der von b auf G erzeugte Automorphismus, d.h. $\beta(x) = b^{-1}xb$ für alle x aus G .

Ist $\beta = 1$, so ist G nichtabelsch. Sei dann $b' = bu$, wobei $u \in G \setminus Z(G)$ ist. Für den von b' erzeugten Automorphismus β' gilt dann $\beta'(x) = u^{-1}\beta(x)u = u^{-1}xu$. Also ist $\beta' \neq 1$.

Wir können also annehmen, dass $\beta \neq 1$ ist. Ist nun $\beta(x) \in \{x, x^{-1}\}$ für alle x aus G , so ist $\beta \in \text{Aut}(G, H) \setminus \{1\}$, was unmöglich ist, da $X = X(G, H)$ GRR von G ist. Also gibt es ein $g \in G$ mit

$$\beta(g) \neq g, g^{-1}$$

Da G eine GRR besitzt, ist $o(G) \geq 12$. Also gibt es ein

$$h \in G \setminus \{e, g, g^{-1}, \beta(g), \beta(g), \beta(g^{-1}), \beta^{-1}(g), \beta(g)g\}.$$

Sei nun $K = \{b, bg, bh\}$.

Ist G eine unendliche Gruppe, so sei $H_1 = H \cup K \cup K^{-1}$.

Ist G eine endliche Gruppe, so sei $H_1 = H \cup (bG \setminus K) \cup (b^{-1}G \setminus K^{-1})$.

Sei $Y = X(G_1, H_1)$ und Y_e der von H_1 aufgespannte Untergraph von Y .

a) Wir zeigen, dass G unter $A_e(Y)$ fest bleibt.

Ist G eine unendliche Gruppe, so folgt dies nach (2,2) und (2,3), da X GRR ist und keine $P_{n,3}$ -Partition besitzt.

Ist G eine endliche Gruppe, so betrachten wir den Graph $Y = I(H_1)$.

Sei die Valenz der Ecke x im Graphen Y_e mit $\rho_e(x)$ bezeichnet.

Da jede Ecke $x \in H$ mit $|G|-3$ Ecken von bG und mit $|G|-3$ Ecken von $b^{-1}G$ verbunden ist, ist x mit mindestens $|G|-6$ Ecken von bG und mit mindestens $|G|-6$ Ecken von $H_1 \cap b^{-1}G$ verbunden.

Also ergibt sich unter Verwendung der Aussage $|G| \geq 12$:

$$\rho_e(x) \geq 2|G|-12 > |G| \text{ für alle } x \in H$$

Jede Ecke $y \in H_1 \setminus H$ ist mit höchstens allen Ecken von H und höchstens $|H|$ Ecken von $bG \setminus K$ bzw. $b^{-1}G \setminus K^{-1}$ und keiner Ecke aus $b^{-1}G \setminus K^{-1}$ bzw. $bG \setminus K$ verbunden. Also ist $\rho_e(y) \leq 2|H|$ für alle $y \in H_1 \setminus H$.

Mit $2|H| \leq |G|-1$ folgt daraus:

$$\rho_e(y) \leq 2|H| \leq |G|-1 \text{ für alle } y \in H_1 \setminus H$$

Aus der Verschiedenheit der Valenzen der Ecken von H und $H_1 \setminus H$ im Graphen Y_e folgt, dass H unter $A_e(Y)$ stabil bleibt. Nach (1,2) bleibt dann auch $G = \langle H \rangle$ unter $A_e(y)$ stabil. Da X eine GRR von G ist, bleibt G dann fest unter $A_e(Y)$.

b) Wir zeigen, dass die Ecke b unter $A_e(Y)$ fest bleibt.

Ist $\varphi \in A_e(Y)$, so ergibt sich aus a) und (1,1), dass für jedes $x \in G$ gilt:

$$\varphi(bx) = \varphi(b) \varphi_b(x) = \varphi(b) x$$

Ist $\varphi(b) \in bG$, so ist $\varphi[K] = K$. Ist $\varphi(b) \in b^{-1}g$, so ist $\varphi[K] = K^{-1}$.

Ist nun $\varphi(b) = bg$, so ist also $K = \{bg, bg^2, bgh\}$. Das ist aber unmöglich, da $g \neq e$ und $h \neq g^{-1}$ ist.

Ist $\varphi(b) = bh$, so ist $K = \{bh, bhg, bh^2\}$. Das ist aber unmöglich, da $h \neq g^{-1}$ und $h \neq e$ ist.

Ist $\varphi(b) = b^{-1}$, so ist $K^{-1} = \{b^{-1}, b^{-1}g, b^{-1}h\}$. Das ist aber unmöglich, da $\beta(g) \neq g^{-1}$ und $h \neq \beta(g^{-1})$ ist.

Ist $\varphi(b) = g^{-1}b^{-1}$, so ist $K^{-1} = \{g^{-1}b^{-1}, g^{-1}b^{-1}g, g^{-1}b^{-1}h\}$.

Das ist aber unmöglich, da $\beta(g) \neq g$ und $h \neq \beta^{-1}(g)$ ist.

Ist $\varphi(b) = h^{-1}b^{-1}$, so ist $K^{-1} = \{h^{-1}b^{-1}, h^{-1}b^{-1}g, h^{-1}b^{-1}h\}$.

Das ist aber unmöglich, da $h \neq \beta(g)$ und $h \neq \beta(g)g$ ist.

Also bleibt b unter $A_e(Y)$ fest.

c) Da die Menge $G \cup \{b\}$ ein Erzeugendensystem ist, das nach a) und b) unter $A_e(Y)$ fest bleibt, folgt, dass Y eine GRR der Gruppe G ist.

Theorem 2. Sei G eine endliche oder unendliche Gruppe. Sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_3 .

Besitzt dann G eine GRR, so besitzt auch G_1 eine GRR.

Beweis: Sei G eine Gruppe, die eine GRR besitzt. Wir nehmen an, dass es eine nichtabelsche Erweiterung G_1 von G durch die Gruppe Z_3 gibt, die keine GRR besitzt. Da G eine GRR besitzt, ist $o(G) \geq 12$. Aus (4,6) folgt nun, dass es eine GRR $X = X(G, H)$ von G gibt, die keine $P_{3,1}$ -Partition besitzt. Sei $b \in G_1 \setminus G$. Dann ist $G_1 = G \cup bG \cup b^{-1}G$. Sei β der von b auf G erzeugte Automorphismus, d.h. $\beta(x) = b^{-1}xb$ für alle $x \in G$.

Sei nun $H_1 = H \cup [b, b^{-1}]$ und sei $Y = x(G_1, H_1)$. Da der Graph X keine $P_{3,1}$ -Partition besitzt, bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil.

Da X eine GRR von G ist, bleibt dann G unter $A_e(Y)$ fest. Nach unserer Annahme ist insbesondere $A_e(Y) = \{1\}$. Nach (1,2) gibt es dann einen Automorphismus $\varphi \in A_e(Y)$, der nicht alle Ecken von G fest lässt.

Also vertauscht φ die Ecken b und b^{-1} . Aus (1,3) folgt, dass dann $\varphi(b^3) = b^{-3}$ ist. Da aber b^3 Element von G ist, bleibt b^3 unter φ fest. Also gilt $b^6 = e$.

Sei nun $x \in G$. Dann geht die Kante $[bx, b^2\beta(x)] \in E(Y)$ unter φ über in die Kante $[b^{-1}x, b^2\beta(x)]$. Die einzige Ecke aus bG , die mit der Ecke $b^{-1}x$ verbunden ist, ist die Ecke $b^{-1}xb^{-1} = b^{-2}\beta^{-1}(x)$.

Also ist $\beta(x) = \beta^{-1}(x)$. Da $x \in G$ beliebig ist, ergibt sich $\beta^2 = 1$

was bedeutet, dass b^2 mit jedem Element von G vertauschbar ist.

Dann ist aber $b^2 \in Z(G_1)$.

Da $b \in G_1 \setminus G$ beliebig gewählt war, folgt:

$$b^6 = e \text{ und } b^2 \in Z(G_1) \text{ für alle } b \in G_1 \setminus G \quad (1)$$

Sei nun $b \in G_1 \setminus G$, $x \in G$ und $b' = b^2x$.

Dann ist $b' \in G_1 \setminus G$, und es gilt $b'^6 = b^{12}x^6 = x^6 = e$ und $b'^2 = b^4x^2 \in Z(G)$.

Also gilt für alle $x \in G$: $x^6 = e$ und $x^2 \in Z(G_1)$

(2)

Aus (1) und (2) folgt, dass für jedes Element x der Gruppe G_1 gilt:

$$x^6 = e \text{ und } x^2 \in Z(G_1)$$

Wir zeigen, dass G_1 dann eine abelsche Gruppe ist.

Sei $U = \{x \in G_1 | x^3 = e\}$ und sei $V = \{x \in G_1 | x^2 = e\}$.

Ist $x \in U$, so gilt $x = x^{-2} \in Z(G_1)$. Also ist U Untergruppe von $Z(G_1)$.

Sind $x, y \in V$, so gilt

$$(xy)^{-3} = (xy)^3 = xy(xy)^2 = x(xy)^2y = yx = (xy)^{-1}.$$

Also ist $(xy)^2 = e$ und V eine abelsche Untergruppe von G_1 .

Da $G^\wedge = UV$ ist, folgt nun, dass $G^\wedge$ eine abelsche Gruppe ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit ist das Theorem bewiesen.

4. Partitionstheoreme

Das folgende Lemma ist im ersten Teil der Aussage ein Spezialfall von (1,4). Durch den hier gegebenen Beweis ergibt sich zusätzliche Information über die Struktur der betrachteten Graphen, falls sie maximale Eckenzahl besitzen.

Lemma 1. Sei X ein isovalenter Graph, der eine $P_{2,n}$ Partition $\{V_1, V_2\}$ von X und eine $P_{2,n}$ -Partition $\{W_1, W_2\}$ von X' besitzt. Dann ist $|V(X)| \leq 8n$.

Ist $|V(X)| = 8n$, so bestehen alle Mengen $V_i \cap W_j$ aus $2n$ Elementen, und jede Ecke $x \in V_i \cap W_j$ ist mit allen Ecken von $V_i \cap W_j$, mit genau n Ecken von $V_i \cap W_{j'}$ und mit keiner Ecke von $V_{i'} \cap W_j$ verbunden ($i, j = 1, 2, i' \neq i, j' \neq j$).

Beweis:

Seien $i, j \in \{1, 2\}$, und sei $i' \neq i, j' \neq j$. Ist dann $V_i \cap W_j$ nicht leer, so gilt mit $x \in V_i \cap W_j$:

$$|V_i \cap W_j| = \rho(x, V_i \cap W_j) + \rho'(x, V_i \cap W_j) \leq \rho(x, V_i) + \rho'(x, W_j) \leq 2n \quad (1)$$

a) Sei eine der Mengen $V_i \cap W_j$ leer. Sei o.B.d.A. $V_1 \cap W_2 = 0$.

Dann ist $V_1 = V_1 \cap W_1$ und $V_2 = V_2 \cap W_2$

Mit (1) folgt daraus: $|W_2| \leq 2n$ und $|V_1| \leq 2n$.

(2)

Sei $x \in V_1$. Dann ist $\rho(x, V_1) \leq 2n - 1$ und es folgt:

$$\rho = \rho(x) = \rho(x, V_1) + \rho(x, V_2) \leq 2n - 1 + n = 3n - 1$$

Sei $y \in W_2$. Dann ist

$$|W_1| = \rho(y, W_1) + \rho'(y, W_1) \leq \rho(y) + n \leq 3n - 1 + n = 4n - 1.$$

Also folgt aus (2) und (3)

$$|V(X)| = |W_1| + |W_2| \leq 4n - 1 + 2n = 6n - 1$$

b) Keine der Mengen $V_i \cap W_j$ sei leer. Dann folgt aus (I)

$$|V(X)| = \sum_{i,j=1}^2 |V_i \cap W_j| \leq 4 * 2n = 8n$$

c) Ist $|V(X)| = 8n$, so ist keine der Mengen $V_i \cap W_j$ leer.

Aus b) folgt, dass $|V_i \cap W_j| = 2n$ ist für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Ist $x \in V_i \cap W_j$, so folgt aus (I), dass gilt:

$$\rho(x, V_i \cap W_j) = \rho(x, V_i) = n \text{ und } \rho'(x, V_i \cap W_j) = n.$$

$$\text{Also ist } \rho(x, V_i \cap W_j) = 0 \text{ und } \rho'(x, V_i \cap W_j) = 0.$$

Daraus folgt $\rho(x, V_i \cap W_j) = 2n$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2. Sei X ein eckentransitiver Graph und sei $|V(X)| = 8n$. Besitzt dann sowohl X als auch X' eine $P_{2,n}$ -Partition, so ist $|A_u(X)| \geq 2n$ für jedes $u \in V(X)$.

Beweis:

Sei $\{V_1, V_2\}$ eine $P_{2,n}$ -Partition von X und $\{W_1, W_2\}$ eine $P_{2,n}$ -Partition von X'. Dann hat der Graph X die in Lemma 1 angegebene Struktur.

a) Die Mengen V_1 und W_1 seien Blöcke von $A(x)$. Dann sind auch die Mengen $V_i \cap W_j$ ($i, j = 1, 2$) Blöcke von $A(X)$.

Sei nun o.B.d.A. $u \in V_1 \cap W_1$ und sei $x \in V_1 \cap W_2$. Da $A(X)$ transitiv auf $V(X)$ ist, gibt es zu jedem $y \in V_1 \cap W_2$ einen Automorphismus ϕ mit $\phi(x) = y$.

Aus der Struktur des Graphen X folgt, dass jede der Mengen $V_i \cap W_j$ unter ϕ stabil bleibt. Ersetzt man die Abbildung ϕ auf der Eckenmenge $(V_1 \cap W_1) \cup (V_2 \cap W_2)$ durch die Identität, so folgt, dass die entstehende Abbildung γ ein Automorphismus aus $A_u(x)$ ist. Da die Menge $V_1 \cap W_2$ aus $2n$ Ecken besteht, ist also $|A_u(X)| > 2n$.

b) Sei V_1 kein Block von $A(X)$. Dann gibt es ein $\phi \in A(x)$, sodass $\phi(V_1) \notin \{V_1, V_2\}$ ist. Sei $U_i = \phi(V_i)$ ($i = 1, 2$), und sei $D_{ijk} = U_i \cap V_j \cap W_k$ ($i, j, k = 1, 2$). Ist der Index $i \in \{1, 2\}$, so sei i' definiert durch $\{i, i'\} = \{1, 2\}$.

Nun ist $D_{ij1} \cup D_{ij2} = U_i \cap V_j \neq \emptyset$. Sei o.B.d.A. $D_{ij1} \neq \emptyset$ und $x \in D_{ij1}$.

Da x mit allen $2n$ Ecken von $V_i \cap W_2$, aber nur mit höchstens n Ecken von U_i verbunden ist, ist $|D_{ij2}| \geq n$. Durch analoge Überlegungen erhält man, dass $|D_{ij1}| \geq n$ ist. Da $|V(X)| = 8n$ ist, folgt $|D_{ijk}| = n$ für alle $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Nun sind die induzierten Untergraphen $I(D_{ijk})$ des Graphen X nach außen frei. Die Graphen $I(D_{ijk})$ sind isovalente Graphen gleicher Valenz mit jeweils n Ecken. Sei A_{ijk} die Automorphismengruppe des Graphen $I(D_{ijk})$. Da insbesondere $n \leq 6$ ist, sind die Graphen $I(D_{ijk})$ eckentransitiv. Also ist $|A_{ijk}| \geq n$ und $|A_U(X)| \geq 7n > 2n$.

c) Es ist noch der Fall zu behandeln, dass W_1 kein Block von $A(x)$ ist. Dann ist X' isomorph zu einem der sich im Fall b) ergebenden Graphen, da $\{W_1, W_2\}$ eine $P_{2,n}$ -Partition von X' ist. Unter Berücksichtigung von $A(x) = A(X')$ folgt daraus die Behauptung.

Aus Lemma 2 ergibt sich unmittelbar die folgende Verallgemeinerung der Aussage (1,7):

Lemma 3. Es gilt $v(2,n) \leq 8n-1$

Wir geben hier die Aussage von [2, Theorem 2] in etwas verschärfter Form wieder:

(3,1) Sei G eine endliche oder unendliche Gruppe, die eine GRR besitzt. Sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_2 . Dann besitzt die Gruppe G_1 eine GRR, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) G_1 ist semidirektes Produkt von G mit Z_2
- (b) $o(G) \neq 12, 16, 32$.
- (c) $o(g) = 16$ und entweder
 - (i) es gibt ein Element $b \in G_1 \setminus G$ mit $o(b) = 4$ oder
 - (ii) $Z_2 \times Z_2$ ist nicht Untergruppe von $Z(g)$.
- (d) $o(G) > v(2,4)$

Dass die Bedingung (d) hinreichend dafür ist, dass G eine GRR besitzt, folgt unmittelbar aus dem Beweis von [2, Theorem 2].

Nach Lemma 3 ist insbesondere $v(2,4) \leq 31$. Aus (3,1) d) folgt nun:

Lemma 4. Sei G eine Gruppe der Ordnung 32, die eine GRR besitzt, und sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch Z_n . Dann besitzt G_1 eine GRR.

Durch Zusammenfassung von Theorem 1, Theorem 2 und Lemma 4 erhält man nun Theorem 3.

Die Aussage (3,1) und Lemma 4 kann man wie folgt zusammenfassen:

(3,2) Sei G eine Gruppe, die eine GRR besitzt, und sei G_1 eine nichtabelsche Erweiterung von G durch Z_2 , die keine GRR besitzt. Dann ist

- a) $o(g) = 12$ und G_1 kein semidirektes Produkt von G mit Z_2
oder
- b) $o(g) = 16$, die Gruppe $Z_2 \times Z_2$ ist Untergruppe von $Z(g)$ und für alle $b \in G_1 \setminus G$ gilt $o(b)=4$.

Die einzige Gruppe der Ordnung 12, die eine GRR besitzt, ist die **Diedergruppe D**. Es gibt fünf Gruppen der Ordnung 16, die eine GRR besitzen (siehe [5]). Von diesen Gruppen erfüllen nur zwei die Bedingung, dass $Z_2 \times Z_2$ Untergruppe von $Z(G)$ ist. Es sind dies die in [5, Prop. 5.1] und [5, Prop. 5.2] untersuchten Gruppen.

Durch individuelle Untersuchung der in Frage kommenden Erweiterungen dieser Gruppen läßt sich zeigen, dass alle Erweiterungen dieser Gruppen durch Z_2 eine GRR besitzen. Da der Beweis jedoch recht langwierig ist, sei hier darauf verzichtet.

5. Literaturverzeichnis

1. W. Imrich, On graphical regulär representations of groups, Coll. Math. Soc. Janos Bolai 10, Keszthely (Ungarn) 1973, 905-925.
2. W. Imrich und M.E. Watkins, On graphical regulär representations of cyclic extensions of groups, Pacific J. Math., 55 (1974) 461-477.
3. L.A. Nowitz und M.E. Watkins, Graphical regulär representations of non abelian groups I, Canad. J. Math., 24 (1972), 993-1008.
4. G. Sabidussi, On a class of fixed-point free graphs, Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), 800-804.
5. M.E. Watkins, Graphical regulär representations of alternating, symmetric, and miscellaneous small groups, Aequat. Math. 11(1974),40-50.
6. M.E. Watkins, The state of the GRR problem, Proceedings of the second Czechoslovakian Conference on graph theory, Juni 1974.

6. Index

Begriff	Seite	Begriff	Seite
Aut(G,H)	3	Lemma 1	8
Automorphismengruppe	2	Lemma 2	9
Cayley-Graph	3	Lemma 3	10
<u>Cayley-Menge</u>	3	Lemma 4	11
Diedergruppe	11	Linksmultiplikation	3
Eckenmenge $V(X)$	2	Stabilisator	2
GRR- graphisch reguläre Darstellung	1	Theorem 1.	5
<u>GRR-Problem</u>	1	Theorem 2.	7
identische Permutation	2	Valenz der Ecke x	2
isovalent	2	zyklische Gruppe	3
Kantenmenge $E(X)$	2		
kleine Gruppe	1		
Komplementärgraph	2		

7. Inhalt

1. Einleitung	1
2. Definitionen und Eigenschaften von Cayley-Graphen	2
3. Erweiterungstheoreme	4
4. Partitionstheoreme	7
5. Literaturverzeichnis	10
6. Index	10